１．４　昇降舵に対する機体応答特性（２）
（航空機の縦系の周期の短い運動について）

H25(2013).9.7(A) 片柳亮二

１．１項～１．３項では，速度変化のような周期の長い運動について検討しました．本項では，縦系の周期の短い運動について検討してみましょう．

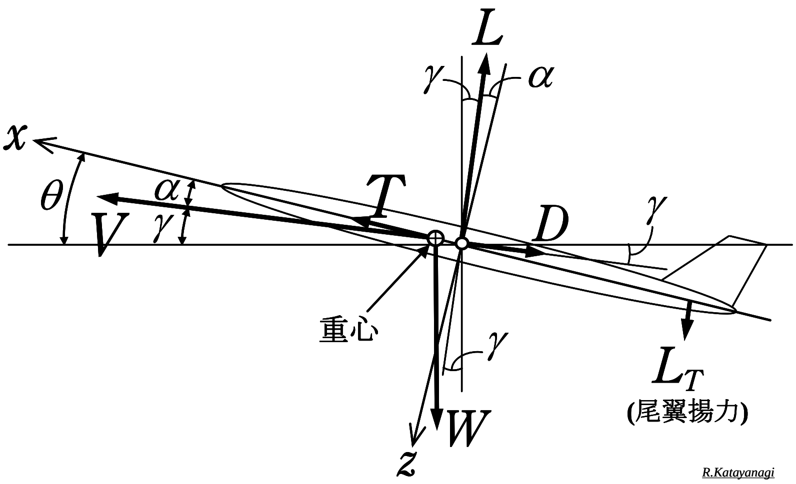

図１　航空機に働く力

図１に示す航空機に働く力の釣合いについて考えてみよう．航空機に働く力は，主翼揚力L，尾翼揚力L_T，抗力（空気抵抗）D，機体重量Wおよびエンジン推力Tです．ここでは，周期の短い運動を扱うので機体速度Vは一定と仮定します．図１から，機体速度の方向と直角方向の運動方程式は次のようになります．

$$\frac{mV}{57.3}\cdot\frac{d\gamma}{dt}=(L-L_T)-W\cos\gamma+T\sin\alpha \tag{1}$$

こで，αは迎角(deg)，γは飛行経路角(deg)，gは重力加速度，$m=W/g$は機体の質量です．なお，図１でθはピッチ姿勢角（機体の前後方向軸xが水平面から上を向いている角度）であり，次の関係があります．

$$\gamma=\theta-\alpha \tag{2}$$

また，重心まわりの回転の釣り合い（モーメント）式は，qを重心まわりのピッチ角速度(deg/s)，Iを重心まわりの慣性モーメントとすると，ピッチ角速度によって発生する尾翼揚力が重心まわりの回転を抑えるモーメントを発生することを考慮して次式で与えられます．

$$\frac{I}{57.3}\cdot\frac{dq}{dt}=(-x_G\cdot L+x_T\cdot L_T)\cos\alpha-L_{T_\alpha}\frac{x_T}{V}q/57.3 \tag{3}$$

ここで，x_Gは主翼揚力の作用点と重心とのx軸方向距離，x_Tは尾翼揚力の作用点と重心とのx軸方向距離，L_{T_α}は尾翼の角度を１°変化させた時に尾翼に発生する揚力を表します．

さて，パイロットが昇降舵を操舵して尾翼揚力を変化させた場合，機体運動が生じますが，次のようなトリム状態（添字 0 で表します）からの変化を考えます．ただし

$$\gamma_0 = 0 \text{（水平飛行）}, \qquad \alpha_0 \fallingdotseq \text{小さい} \tag{4}$$

と仮定します．

$$\begin{cases} T \to T_0, & V \to V_0 + \Delta V \\ L \to L_0 + \Delta L, & L_T \to L_{T0} + \Delta L_T, \qquad D \to D_0 + \Delta D \\ \gamma \to \Delta\gamma, & \sin\gamma \to \Delta\gamma/57.3, \qquad \cos\gamma \to 1 \\ \alpha \to \alpha_0 + \Delta\alpha, & \sin\alpha \to (\alpha_0 + \Delta\alpha)/57.3, \qquad \cos\alpha \to 1 \end{cases} \tag{5}$$

このとき，(1)式および(3)式は次のように表されます．

$$\begin{cases} \dfrac{mV}{57.3} \cdot \dfrac{d\Delta\gamma}{dt} = \Delta L - \Delta L_T + T_0 \cdot \Delta\alpha/57.3 \\ \dfrac{I}{57.3} \cdot \dfrac{dq}{dt} = -x_G \cdot \Delta L - L_{T\alpha} \dfrac{x_T}{V} q/57.3 + x_T \cdot \Delta L_T \end{cases} \tag{6}$$

ここで，(6)式の揚力ΔLを

$$\Delta L = L_\alpha \cdot \Delta\alpha/57.3 \tag{7}$$

と表し，また(6)式の 1 番目の式のΔL_Tおよび$T_0 \cdot \Delta\alpha/57.3$は$\Delta L$に比較して小さいとして省略し，さらに(2)式から

$$\Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha, \qquad \therefore \Delta\dot{\gamma} = q - \Delta\dot{\alpha} \tag{8}$$

の関係式を用いると，(6)式は次のように変形できます．

$$\begin{cases} mV \dfrac{d\Delta\alpha}{dt} = -L_\alpha \cdot \Delta\alpha \quad + q \\ I \dfrac{dq}{dt} = -x_G \cdot L_\alpha \cdot \Delta\alpha - \dfrac{x_T \cdot L_{T\alpha}}{V} q + x_T \cdot \Delta L_T \times 57.3 \end{cases} \tag{9}$$

ここで，次のパラメータ

$$\overline{Z}_\alpha = -\frac{L_\alpha}{mV}, \quad M'_\alpha = -\frac{x_G \cdot L_\alpha}{I}, \quad M'_q = -\frac{x_T \cdot L_{T\alpha}}{VI}, \quad M'_{\delta e}\delta e = \frac{x_T \cdot L_T \times 57.3}{I} \tag{10}$$

を導入します．この式でδeは昇降舵舵角で，尾翼に上側の揚力を生じさせる方向を正とします．また簡単のため，以後$\Delta\alpha$を単にαと書くことにします．このとき，(9)式は次式で表されます．

$$\begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} = \overline{Z}_\alpha \alpha + q \\ \dfrac{dq}{dt} = M'_\alpha \alpha + M'_q q + M'_{\delta e} \delta e \end{cases} \tag{11}$$

なお，ピッチ姿勢角θは次から得られます．

$$\frac{d\theta}{dt} = q \tag{12}$$

これでトリム状態からパイロットが昇降舵を操舵した場合の運動方程式が得られました．これを用いて縦系の周期の短い運動について検討してみましょう．

(11)式および(12)式の運動方程式は微分方程式であるので，ラプラス変換で解析することにしましょう．ラプラス変換とは，例えば変数xを時間微分したdx/dtは，xに単に変数sを掛けたsxとして表します．この変数sはラプラスの記号で，ラプラス変換した後は単なる変数として四則演算をすればよく,微分方程式を解析するのに簡単で有用な方法です．

(11)式および(12)式を実際にラプラス変換すると次のようになります．

$$\begin{cases} s\alpha = \bar{Z}_\alpha \alpha + q \\ sq = M'_\alpha \alpha + M'_q q + M'_{\delta e} \delta e \\ s\theta = q \end{cases} \qquad (13)$$

(13)式の 1 番目と 2 番目の式を整理すると次のように表されます．

$$\begin{cases} (s - \bar{Z}_\alpha)\alpha - q = 0 \\ -M'_\alpha \alpha + (s - M'_q) q = M'_{\delta e} \delta e \end{cases} \qquad (14)$$

この式の 1 番目の式からqを求めて 2 番目の式に代入してqを消去すると昇降舵に対する迎角の応答特性が次式で得られます．

$$\frac{\alpha}{\delta e} = \frac{M'_{\delta e}}{s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}{}^2} \qquad (15)$$

ここで，右辺の分母の変数は次式です．

$$\begin{cases} \omega_{sp}{}^2 = M'_q \bar{Z}_\alpha - M'_\alpha \\ 2\zeta_{sp}\omega_{sp} = -M'_q - \bar{Z}_\alpha \end{cases} \qquad (16)$$

同様に，ピッチ角速度は次式で表されます．

$$\frac{q}{\delta e} = \frac{M'_{\delta e}\left(s + \frac{1}{T_{\theta 2}}\right)}{s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}{}^2} \quad \text{，ただし} \quad \frac{1}{T_{\theta 2}} = -\bar{Z}_\alpha = \frac{\rho VS}{2m} C_{L\alpha} \times 57.3 \qquad (17)$$

従って，ピッチ姿勢角は次のようになります．

$$\frac{\theta}{\delta e} = \frac{1}{s} \cdot \frac{q}{\delta e} = \frac{M'_{\delta e}\left(s + \frac{1}{T_{\theta 2}}\right)}{s\left(s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}{}^2\right)} \qquad (18)$$

また，次の関係式も得られます．

$$\frac{\gamma}{\delta e} = \frac{\theta - \alpha}{\delta e} = \frac{M'_{\delta e}/T_{\theta 2}}{s\left(s^2 + 2\zeta_{sp}\omega_{sp}s + \omega_{sp}{}^2\right)} \qquad (19)$$

$$\frac{h}{\delta e} = \frac{V}{57.3s} \cdot \frac{\gamma}{\delta e}, \qquad \frac{\Delta n_z}{\delta e} = \frac{s^2}{g} \cdot \frac{h}{\delta e} = \frac{Vs}{57.3g} \cdot \frac{\gamma}{\delta e} \qquad (20)$$

ここで，hは高度，Δn_zは揚力を機体重量で割った荷重倍数です．また，上記関係式を用いると，ピッチ姿勢角に対する迎角，飛行経路角および荷重倍数の関係が次のように得られます．

$$\frac{\alpha}{\theta} = \frac{T_{\theta 2}s}{1 + T_{\theta 2}s}, \qquad \frac{\gamma}{\theta} = 1 - \frac{\alpha}{\theta} = \frac{1}{1 + T_{\theta 2}s}, \qquad \frac{\Delta n_z}{\theta} = \frac{V}{57.3g} \cdot \frac{s}{1 + T_{\theta 2}s} \qquad (21)$$

これで，縦系の周期の短い運動を検討するための解析式が得られました．実際の検討結果については別の項で説明しましょう．

以上